

Olimpiada Națională de Matematică

Al doilea test de selecție pentru OBM și OIM – Seniori 2003

24 aprilie 2003

Subiectul 1

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = [n\sqrt{2003}]$, $n \geq 1$. Să se arate că pentru orice numere naturale m și p , șirul conține m termeni în progresie geometrică cu rația strict mai mare decât p .

Subiectul 2

Fie f un polinom coeficienți întregi având coeficientul dominant 1, ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$ și astfel încât $|f(0)|$ nu este pătrat perfect. Să se arate că polinomul $g(X) = f(X^2)$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$.

Subiectul 3

La un concurs de matematică participă $2n$ concurenți: fiecare propune o problemă și cele $2n$ probleme propuse sunt repartizate, câte una, celor $2n$ concurenți. Concursul se numește corect dacă există n concurenți care primesc problemele celorlalți n concurenți.

Să se arate că numărul modurilor de a distribui problemele într-un concurs corect este pătrat perfect.

Timp de lucru: 4 ore